



Владимир Григорьев



Александр Козловских



Оксана Ситникова

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЬЮЧЕРСНОГО РЫНКА

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РЫНОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Проблема прогнозирования динамики рыночных характеристик является одной из основных в экономике, ее эффективное решение позволяет правильно оценить сложившуюся ситуацию на рынке. Существующие фундаментальные теории прогнозирования экономических последовательностей [1] обнаруживают ограничения в проблеме прогноза. Как правило, данные методы не учитывают взаимосвязи экономических характеристик исследуемой системы и требуют наличия тренда в анализируемом временном ряде.

Наиболее перспективный подход в моделировании экономических процессов основан на теории детерминированного хаоса. Методы данной теории позволяют учитывать взаимосвязь и степень влияния друг на друга экономических показателей исследуемой системы, которые соответствуют критериям хаотического движения [2]. Данная теория утверждает,

что введение в модель теоретически оправданных нелинейностей позволяет описывать экономические флуктуации более успешно, нежели применение вероятностных моделей.

НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФЬЮЧЕРСНЫХ РЫНКОВ И СХЕМА ЕЕ АДАПТАЦИИ

Для получения модели методами нелинейной динамики первоначально необходимо установить размерность пространства вложения, определяющую минимальное число уравнений, необходимых для описания динамической системы. С этой целью необходимо вычислить размерность Хаусдорфа — d или оценить ее путем вычисления корреляционной размерности — d_c .

В результате торгов на фьючерсном рынке измеряется значение цены контракта, т. е. существует набор $a_i = a(i\Delta t)$, $i=1, N$.

Считаем, что ряд a является одномерной проекцией фазовой траектории динамической системы. Предполагаем, что эта траектория принадлежит аттрактору системы, размерность которого равна d . В этом случае согласно теореме Такенса задать вектор состояния можно по методу [3]:

$$x(t) = \{a(t), a(t+\tau), \dots, a(t+(m-1)\tau)\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\},$$

где τ — задержка по времени, m — размерность пространства вложения, $m \geq 2d + 1$.

Далее вычисляем корреляционную размерность аттрактора

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lg C(\epsilon, N)}{\lg \epsilon},$$

$$\text{где } C(\epsilon, N) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} Q(\epsilon - \|X_i - X_j\|),$$

корреляционный интеграл, ϵ — расстояние между точками x_i, x_j в m -мерном фазовом пространстве, N — число m -мерных точек.

$$Q = 0, \text{ если } \varepsilon - \|X_t - X\| > 0,$$

$$Q = 1, \text{ если } \varepsilon - \|X_t - X\| < 0.$$

Повторим свои действия, увеличивая размерность пространства m до тех пор, пока зависимость $d_c(m)$ не достигнет насыщения. Размерность d_c при насыщении определяет размерность аттрактора [2]. Эксперименты показали, что для исследуемой системы значение $m \geq 2d + 1$ оказывается избыточным — достаточно ограничиться пространством вложения с меньшей

затяжками отражена перекрестным произведением соответствующих фазовых переменных:

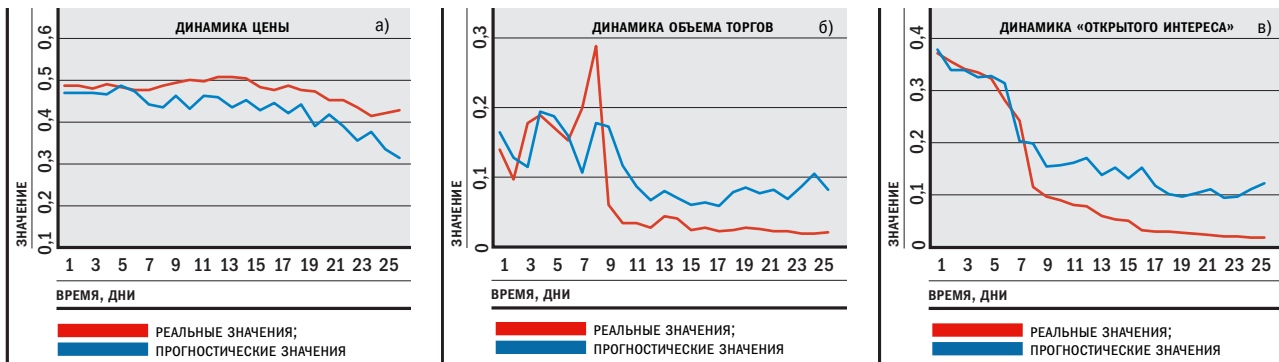
$x_1(t) \cdot x_2(t)$ — оборот торгов, отражает взаимосвязь между ценой контракта и объемом торгов и позволяет учитывать в модели внутренние силы, управляющие движением цены;

$x_1(t) \cdot x_3(t)$ — текущая ликвидность рынка, отражает взаимосвязь между ценой контракта и «открытым интересом», позволяет отразить факт заинтересованности тем или иным контрактом с долго-

изводные вычисляются методом конечных разностей. Если длина временных рядов порядка десяти значений, то для вычисления вектора первых производных предпочтительнее использовать квадратичные сплайны [6]. Если длина временного ряда составляет более десяти значений, наиболее целесообразно использовать кубические сплайны [6].

Рассмотрим векторы \bar{X} и \bar{F} в фиксированные моменты времени, т. е. запишем значения соответствующих фазовых переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ в точках $t-2$, $t-1$, t .

Рисунок 1. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ РЫНОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ СХЕМЫ АДАПТАЦИИ



размерностью, округлив d_c до целого числа сверху.

В нашем случае размерность аттрактора, оцененная при помощи вычисления корреляционной размерности, составила дробное значение порядка 2,6, что является одним из основных признаков хаотичности исследуемой системы.

Проведенный анализ последовательности наблюдений изменения цены на различных фондовых рынках позволил ограничиться тремя уравнениями для описания исследуемой динамической системы. С помощью априорной информации в качестве фазовых координат системы были выбраны: цена контракта, объем торгов, «открытый интерес». Таким образом, модель динамики фьючерсного рынка описывает процесс изменения трех рыночных характеристик и имеет следующий вид:

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = A\bar{X} + \bar{F}, \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & b_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & c_3(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix},$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} a_2(t)x_1(t)x_2(t) + a_3(t)x_1(t)x_3(t) \\ b_1(t)x_1(t)x_2(t) + b_3(t)x_2(t)x_3(t) \\ c_1(t)x_1(t)x_3(t) + c_2(t)x_2(t)x_3(t) \end{bmatrix}.$$

где $x_1(t)$ — цена контракта, $x_2(t)$ — объем торгов, $x_3(t)$ — «открытый интерес».

Существующая взаимосвязь между вышеописанными экономическими пока-

срочной точки зрения, другими словами, определить, насколько серьезно участники рынка воспринимают текущий тренд;

$x_2(t) \cdot x_3(t)$ — взаимосвязь между объемом торгов и «открытым интересом». О количественной характеристике взаимосвязи объема и «открытого интереса» известно мало, но качественную характеристику, опираясь на экспериментальные данные, можно сформулировать следующим образом: «Увеличение объема торгов должно подтверждаться достаточным открытым интересом» [4, 5];

$a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ — неизвестные параметры, определяющие степень влияния соответствующих показателей рынка и их взаимосвязи на поведение системы. Данные параметры являются переменными на некотором достаточно большом отрезке времени, но «кусочно-постоянными» на небольшом исследуемом интервале — шаге прогноза.

СХЕМА АДАПТАЦИИ И СОСТАВЛЕНИЕ ПРОГНОЗА

На первом этапе построения точного прогноза определяются неизвестные параметры системы. Для этого рассмотрим три временных ряда (цена контракта, объем торгов, «открытый интерес»), минимальная длина которых должна быть равна трем. Вычислим вектор первых производных $\frac{d\bar{X}}{dt}$. Если временные ряды имеют длину вблизи минимальной, про-

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 . Решив данную систему, подставим найденные параметры в модель (1), считая их постоянными на шаге прогнозирования.

Далее, решая задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений при начальных условиях в точке t , находим \bar{X}_p — вектор прогностических значений в точке $t+1$. В результате получим точечный прогноз на один шаг вперед. В данной работе под интервалом прогнозирования понимается торговая сессия. В качестве масштаба времени могут быть использованы дни, недели, месяцы и т. д. Интегрируя систему (1) больше чем на один шаг, можно получить более длительный прогноз (рис. 1, а, б, в). Так как все процессы, характеризующиеся наличием хаоса, гиперчувствительны к точности задания параметров и начальных условий [7], краткосрочное прогнозирование наиболее качественно осуществляется с помощью адаптивных непрерывно подстраиваемых моделей.

Рассмотрим схему адаптации модели:

- 1) оценим по трем первым значениям уровней ряда параметры модели;
- 2) построим прогноз модели (1) на один шаг вперед;
- 3) произведем пересчет параметров модели с учетом последнего полученного реального значения ряда. Для этого рассмотрим модель (1) в следующие фиксированные моменты времени — $t-1$, t , $t+1$

$(t+1)$ — реальное, полученное значение), т. е. осуществим перенос отсчета времени на один интервал вперед.

Подставим найденные параметры $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ в систему (1). Решая задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений при начальных условиях в точке $t+1$, найдем \vec{X}_p — вектор прогностических значений в точке $t+2$. Таким образом, согласно данной схеме на каждом шаге осуществляется обновление параметров модели $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ и начальных условий с учетом

$$C = \begin{bmatrix} x_1(t-2)x_2(t-2) & x_2(t-2)x_3(t-2) & x_3(t-2) \\ x_1(t-1)x_2(t-1) & x_2(t-1)x_3(t-1) & x_3(t-1) \\ x_1(t)x_2(t) & x_2(t)x_3(t) & x_3(t) \end{bmatrix}.$$

3. Найдем по формуле (2) \vec{K} — вектор параметров для модели

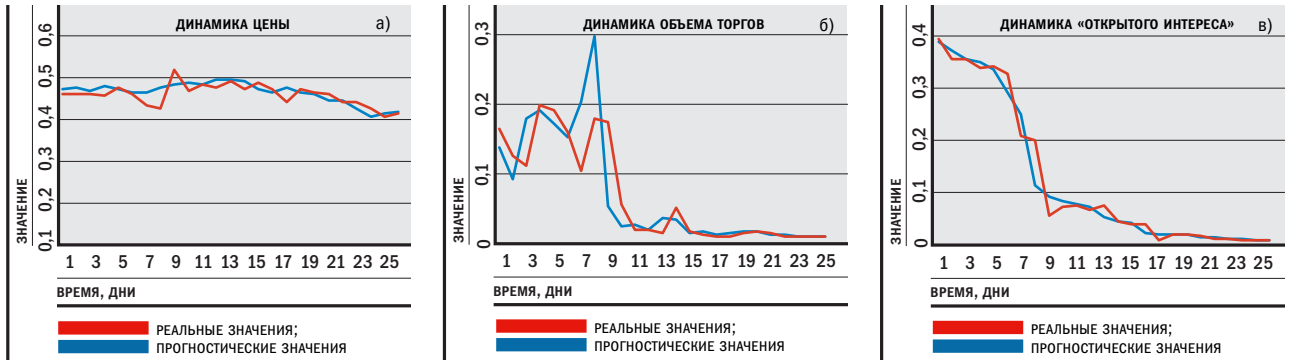
$$\vec{K} = Q^{-1}\vec{D}, \quad (2)$$

$$\vec{K} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T.$$

4. Подставляя найденные параметры в модель (1) и задавая началь-

3. Представленная модель и разработанная схема ее адаптации достаточно адекватно описывают динамику фьючерсного рынка, что хорошо показывают прогностические и реальные кривые на рис. 2. В то же время применение модели без схемы адаптации не позволяет получать качественный прогноз, что объясняется гиперчувствительностью хаотических систем к точности задания начальных условий и параметров модели. Вместе с тем пошаговая адаптация модели, несомненно, сужает го-

Рисунок 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ РЫНОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМЫ АДАПТАЦИИ



развития событий, что позволяет применять модель в реальном времени и отодвигать горизонт прогнозирования (рис. 2, а, б, в).

СХЕМА ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для проведения тестовых расчетов использовались исходные данные — фьючерсные контракты на валюту.

1. Имея три временных ряда (цена контракта, объем, «открытый интерес») длиной более десяти значений, оценим D — вектор первых производных при помощи кубических сплайнов:

$$\vec{D} = \left[\frac{dx_1(t-2)}{dt} \quad \frac{dx_1(t-1)}{dt} \quad \frac{dx_1(t)}{dt} \quad \frac{dx_2(t-2)}{dt} \quad \frac{dx_2(t-1)}{dt} \quad \frac{dx_2(t)}{dt} \quad \frac{dx_3(t-2)}{dt} \quad \frac{dx_3(t-1)}{dt} \quad \frac{dx_3(t)}{dt} \right]^T.$$

2. Заполним матрицу Q реальными данными, где $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ — последние известные значения соответствующих рядов.

$$Q = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1(t-2) & x_1(t-2)x_2(t-2) & x_1(t-2)x_3(t-2) \\ x_1(t-1) & x_1(t-1)x_2(t-1) & x_1(t-1)x_3(t-1) \\ x_1(t) & x_1(t)x_2(t) & x_1(t)x_3(t) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} x_2(t-2) & x_2(t-2) & x_2(t-2)x_3(t-2) \\ x_2(t-1) & x_2(t-1) & x_2(t-1)x_3(t-1) \\ x_2(t) & x_2(t) & x_2(t)x_3(t) \end{bmatrix},$$

ные условия ($x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ — последние известные значения соответствующих рядов), интегрируем систему (1) и получаем прогностические значения.

5. При необходимости используем схему адаптации, на каждом шаге прогнозирования, обновляя начальные условия и параметры модели.

Результаты исследования представлены на рис. 1 и 2.

ВЫВОДЫ

По представленным материалам можно сформулировать следующие выводы:

1. Данная модель позволяет получить прогностические реализации всех описанных характеристик (см. рис. 1, 2), что дает возможность трейдерам составлять более долгосрочные прогнозы, применяя методы технического анализа.

2. Еще одна возможность применения представленной модели — получение прогностической свечи (метод предоставления информации, наиболее употребляемый в настоящее время в среде технических аналитиков [4, 5]). Последовательно меняя в модели (1) первую фазовую координату $x_1(t)$ на цену закрытия, цену открытия, максимальную и минимальную цену, можно получить набор прогностических цен на один шаг вперед, что позволяет нам построить прогностическую свечу.

ризонт прогнозирования, но применение ее оправдывается качеством получаемого прогноза.

Таким образом, данный пример построения модели на основе теории детерминированного хаоса показывает, что многие случайные экономические явления более предсказуемы, чем принято считать.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезную и доброжелательную критику, позволившую улучшить восприятие статьи. ■

Литература:

1. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В. В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 2001.
2. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров / Пер с англ. М.: Мир, 1990.
3. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes and Mathematics/Eds D. Rang, L.S. Young. Warwick. Springer, Berlin, 1980. Vol. 898. P. 366.
4. Мэрфи Дж. Технический анализ фьючерсных рынков: теория и практика. М.: Колл, 1996.
5. Кузнецов М. В. Технический анализ рынка ценных бумаг. Киев.: Наукова думка, 1990.
6. Василенко В. В. Слайд-функции. М.: Мир, 1985.
7. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. М.: Мир, 1990.