Дмитрий Жабин

Одилжон Юлдашев

РЕКУРСИВНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ

В статье излагаются основные принципы рекурсивного хеджирования. Рассмотрено применение предложенного метода на примере портфелей, состоящих из опционов и фьючерсов на индексы DAX и SMI. Показано, что дисперсия портфеля при следовании стратегии рекурсивного хеджирования значительно меньше, чем дисперсия портфеля при выборе коэффициента хеджа путем наивного применения модели Блэка—Шоулза.

ВВЕДЕНИЕ

В современных финансах управление рисками — основополагающая категория в жизнеспособности финансовых институтов. Финансовые инструменты с нелинейной *pay-off* – функцией являются сложным классом для риск-менеджмента. Наиболее ярко представляют такие инструменты опционы. Большинство современных стратегий хеджирования в качестве инструментов регулярного риск-менеджмента предполагают, что опцион — хеджирующий инструмент. Классическое дельта-хеджирование, использующее принцип риска нейтральности, основано на идеях существования частных производных. Оно великолепно решает проблемы рисков в «мире Блэка—Шоулза», когда изменения цен базового актива (далее — БА) являются независимыми и идентичными случайными величинами с логнормальной функцией вероятностного распределения. Но, увы, реальная жизнь, как всегда, оказывается сложнее. В этой работе была сделана скромная попытка расширить рамки возможностей классического дельта-хеджирования, применяя подходы стохастического контроля, на примере портфеля из фьючерсов и опционов на индексы *DAX* и *SMI*, рассмотрен способ рекурсивного хеджирования и произведено сравнение данного метода с наивным применением модели Блэка—Шоулза для определения коэффициента хеджа (*hedge ratio*). Анализ показал, что применение рекурсивного хеджирования значительно снижает волатильность рассматриваемого портфеля по сравнению с волатильностью портфеля, составленного при помощи наивного применения модели Блэка—Шоулза.

ПРОБЛЕМА ХЕДЖИРОВАНИЯ И МОДЕЛЬ БЛЭКА—ШОУЛЗА

В последнее время все чаще в финансовых кругах ведутся разговоры о необходимости хеджирования рыночных рисков, обусловленных волатильностью рыночных активов. Цена производного финансового инструмента по определению существенно зависит от цены БА. Естественным образом встает вопрос: насколько определяю-

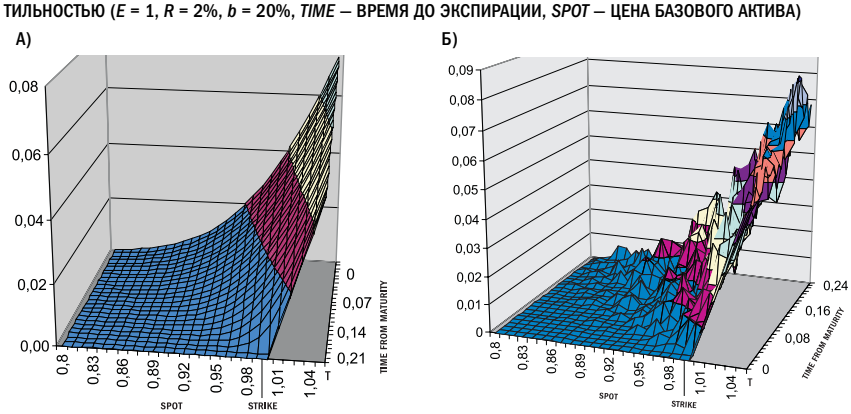
щей является эта связь для цены производного финансового инструмента и можно ли использовать ее для получения прибыли и/или управления рыночным риском? В 1973 г. была предложена модель Блэка–Шоулза, которая отвечала на эти вопросы [1]. Для этого авторы модели предположили, что на рынке не существует иных источников неопределенности, кроме «случайного блуждания», свойственного ценным бумагам. Такое предположение подразумевает, что инвесторы, играющие на бирже, находятся в условиях конкуренции и не могут влиять на состояние рынка, а случайное изменение рыночных котировок имеет такую же природу, что и подбрасывание монеты. Если принять данные предположения, то естественным будет вывод о том, что в результате совершенной конкуренции и, как следствие, оптимального распределения ресурсов рынок стремится к некоторому равновесному положению, а цены ценных бумаг – к справедливым ценам. Таким образом, модель была избавлена от трудностей, связанных с описанием рефлексивного характера действий инвесторов.

Однако гипотеза о логнормальном поведении БА не подтверждается статистическими тестами, что свидетельствует о более сложной и, возможно, неоднозначной природе рыночных процессов [2]. Более того, на реальном рынке крайне трудно, а порой просто невозможно осуществить непрерывное хеджирование без существенных затрат. Легко показать, что данное ограничение, даже в предположении о логнормальном поведении БА, приводит к выводу, что провести хеджирование с вероятностью, равной единице, затруднительно [3].

Модель Блэка–Шоулза определяется пятью параметрами: безрисковой процентной ставкой r, волатильностью b, спот-ценой БА S, ценой исполнения E и временем исполнения T. На рис. 1, а приведен пример изменения цен колл-опциона за все время жизни опциона, с момента $t = 0$ до момента экспирации $t = T$, рассчитанных по модели Блэка–Шоулза.

Однако реальность не соответствует модельным предположениям. В частности, величина, характеризующая изменчивость цены базового актива (волатильность), не является константой. Попытки оценки волатильности привели к более сложным моделям ценообразования опционов [4]. Пожалуй наиболее реалистичными моделями являются модели со стохастической волатильностью. В этих моделях волатильность меняется хаотично как с течением времени, так и для разных рыночных цен. Одно только это свойство ценовых рядов, даже если предположить, что все прочие условия модели Блэка–Шоулза соответствуют реальности, существенно изменяет характер ценообразования опциона. На рис. 1, б приведен пример реализации ценообразования опциона в рамках модели Блэка–Шоулза, когда волатильность хаотично меняется около значения $b = 20\%$ за время жизни опциона, с момента $t = 0$ до момента экспирации $t = T$. Данный пример, несмотря на его «ненаучность», наглядно демонстрирует появляющиеся сложности при переходе к более реалистичной модели поведения БА.

Рисунок 1. ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ ОПЦИОНА ПО МОДЕЛИ БЛЭКА–ШОУЛЗА (А) и (Б) СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ ($E = 1$, $R = 2\%$, $b = 20\%$, *TIME* – ВРЕМЯ ДО ЭКСПИРАЦИИ, *SPOT* – ЦЕНА БАЗОВОГО АКТИВА)



Заметим, что поверхность на рис. 1, а является гладкой в отличие от поверхности на рис. 1, б, следовательно, в модели Блэка–Шоулза незначительные отклонения рыночных условий могут привести только к незначительным отклонениям в ценах финансовых инструментов. Данное свойство цены опциона, полученной в рамках модели Блэка–Шоулза, позволяет управлять рыночным риском в портфеле, в который включен опцион и БА. Действительно, если в каждый момент времени в портфеле, состоящим из одного опциона и соответствующего БА, доля БА будет составлять величину тангенса угла наклона касательной к кривой цен в точке рыночной цены БА, то дисперсия такого портфеля в модели Блэка–Шоулза будет равна нулю.

Очевидно, что для случая стохастической волатильности аналогичный выбор доли БА в портфеле не будет соответствовать оптимальной стратегии управления рыночным риском портфеля, если даже такая касательная будет существовать. Как раз в этом случае на помощь могут прийти методы стохастического контроля.

Рассмотрим управление рыночным риском на реальных примерах. Откроем «короткую» позицию по опциону (V) на некоторый базовый актив и «длинную» позицию по фьючерсному контракту (F). Поскольку поддержание фьючерсной позиции требует только покрытия маржинального обеспечения, данный портфель позволяет использовать рынок в качестве источника заемных средств. Другими словами, рассмотрим следующий портфель:

$$\Pi = -V + x \cdot F, \qquad (1)$$

где x – количество (доля) фьючерса.

С точки зрения здравого смысла оптимальный способ управления рисками – минимизировать изменения портфеля (1). Это полностью соответствует заинтересованности инвестора в том, чтобы стоимость обслуживания такого портфеля с учетом погашения была минимальной, что достигается путем разработки стратегии управления заемными средствами, т. е. выбора способа определения коэффициента хеджа – величины x.

Рассмотрим один из возможных способов применения модели Блэка–Шоулза к управлению рыночным риском. Из пяти параметров модели Блэка–Шоулза три однозначно определяются рынком и опционным контрактом (S, E, T), оставшиеся два параметра (r и b) нужно определить таким образом, чтобы воспроизвести рыночную стоимость опционного контракта в заданный момент времени. Поскольку для целей, которые преследует данная статья, динамика r оказывается малозначимой, зафиксируем значение процентной ставкой на уровне $r = 2{,}1\%$, что приблизительно соответствует годовой ставке безрисковой процентной доходности по бондам на бирже *EURAX*. Тогда в качестве значения волатильности b можно взять подразумеваемую (*implied*) волатильность b_{imp}, а в качестве коэффициента хеджа – *Delta GREEK* с поправкой на то, что в портфеле вместо БА участвует фьючерс. Такой способ калибровки модели к рынку для определения коэффициента хеджа будем называть наивным использованием модели Блэка–Шоулза. Результаты расчетов индексов *DAX* и *SMI*, торгуемых на *EURAX*, представлены в третьей колонке табл. 1, 2. Очевидно, что такое наивное использова-

ние модели Блэка–Шоулза не решает вопросов хеджирования.

РЕКУРСИВНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ

В реальной торговле мы можем диверсифицировать портфель (1) только в дискретные моменты времени t_i, что в значительной степени нивелирует преимущества непрерывного хеджирования. Задача оптимального управления заемными средствами в этом случае может быть сформулирована следующим образом:

$$\left\| \Pi_i - \Pi_{i-1} \right\| \to \min, \quad (2)$$

где $||A||$ – норма некоторой величины A, индекс i нумерует момент времени t_i.

Напомним, что в модели Блэка – Шоулза в качестве нормы выступает дисперсия.

Заметим, что на реальном рынке конкуренция несовершенна, а рынок не является полным, поэтому обеспечение хеджирования с вероятностью, равной единице, на практике представляется затруднительным. В современной литературе [5] под оптимальной стратегией хеджирования обычно понимают такой способ хеджирования, когда средняя стоимость хеджирования (т. е. затраты на открытие, закрытие и поддержание всех позиций в рассматриваемом портфеле) равна нулю, а плотность распределения стоимости хеджирования максимально близка нулю. Такой подход более чем оправдан при попытке построения модели ценообразования опциона как хеджирующего инструмента.

Однако безотносительно к проблеме ценообразования деривативa мы постараемся ответить на вопрос, можно ли так подбирать долю x в портфеле (1), чтобы стоимость портфеля не изменялась с течением времени. Основание для такого подхода служит достаточно простое рассуждение: если мы используем рынок в качестве источника заемных средств, то мы заинтересованы в том, чтобы наш долг, по крайней мене, не изменялся. Из постановки вопроса очевидно, что в качестве нормы в выражении (2) можно выбрать квадрат разности, т. е.

$$\left(\Pi_i - \Pi_{i-1}\right)^2 \to 0. \quad (3)$$

Предполагая, что в момент времени t_i портфель Π_i уже каким-то образом составлен, определим, каким должно быть значение x_{i+1}, чтобы в момент времени $t_i + 1$ изменение стоимости портфеля было равным нулю. Решение дается следующей рекуррентной формулой:

$$x_{i+1} = x_i + \delta x_i, \quad (4)$$

где

$$\delta x_i = \frac{\delta F_i}{F_{i+1}} \left(\frac{\delta V_i}{\delta F_i} - x_i \right).$$

Из (4) легко показать, что на полном рынке при условии непрерывного хеджа оптимальная стратегия хеджирования будет совпадать со стратегией, диктуемой моделью Блэка–Шоулза.

Некоторые статистические оценки данной стратегии хеджирования и сравнение с результатами наивного хеджирования по методу Блэка–Шоулза приведены для индексов *DAX* и *SMI* в табл. 1, 2. В качестве начального значения x0 выбиралось значение коэффициента хеджа, рассчитанного по модели Блэка–Шоулза в начальный момент времени.

Заметим, что рекурсивное хеджирование дает менее рисковый портфель. Для наглядности изобразим гистограмму функции плотности для разности $\Pi_i - \Pi_0$ на рис. 2

Более подробное описание статистики для отклонений в стоимости портфеля от начальной стоимости приведено в табл. 3.

Легко заметить, что разница стоимости портфеля в некоторый момент времени относительно его первоначальной стоимости локализована около нуля с модой и медианой, равной нулю.

Таблица 1. *ODAX, CALL, E* = 3900, *T* = ДЕКАБРЬ 2003 Г. (ДАННЫЕ С 1 ПО 19 ДЕКАБРЯ 2003 Г.)

Показатель	Параметры ценных бумаг		Параметры портфеля	
	Option	Futures	Метод Блэк–Шоулза	Рекурсивный
СКО, %	52,12	0,79	40,30	0,06
Размах, %	196,97	3,90	153,39	1,16

Таблица 2. *OSMI, CALL, E* = 5500, *T* = ФЕВРАЛЬ 2003 Г. (ДАННЫЕ С 5 ПО 16 ДЕКАБРЯ 2003 Г.)

Показатель	Параметры ценных бумаг		Параметры портфеля	
	Option	Futures	Метод Блэк–Шоулза	Рекурсивный
СКО, %	15,502	0,662	8,204	0 ,111
Размах, %	51,309	2,132	28,661	0,356

Рисунок 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЯ ПРИ ХЕДЖИРОВАНИИ *ODAX, CALL, E* = 3900, *T*= ДЕКАБРЬ 2003 Г. (ДАННЫЕ С 1 ПО 19 ДЕКАБРЯ 2003 Г.)

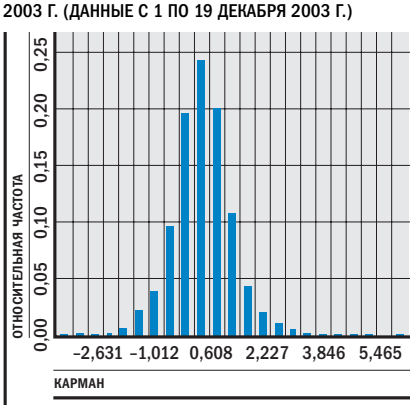


Таблица 3. СТАТИСТИКА ДЛЯ *ODAX, CALL, E* = 3900, *T* = ДЕКАБРЬ 2003 Г. (ДАННЫЕ С 1 ПО 19 ДЕКАБРЯ 2003 Г.)

Показатель	Значение
Среднее	0,033982
Стандартная ошибка	0,021435
Медиана	0
Мода	0
Стандартное отклонение	0,99205
Дисперсия выборки	0,984163
Эксцесс	15.87796
Асимметричность	0,401842
Интервал	18.61991
Минимум	-9,10713
Максимум	9,512787
Уровень надежности (95,0%)	0,042036

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе на примере портфеля из фьючерсов и опционов на индексы *DAX* и *SMI* рассматривается способ рекурсивного хеджирования и сравнивается данный метод с наивным применением модели Блэка–Шоулза для определения коэффициента хеджа (*hedge ratio*). Анализ показывает, что применение рекурсивного хеджирования значительно снижает волатильность рассматриваемого портфеля по сравнению с волатильностью портфеля, составленного при помощи наивного применения модели Блэка–Шоулза. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Option and Corporate Liabilities. // Journal of Political Economy, 1973. Vol. 81. P. 637–654.

2. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынке капитала. М.: Мир, 2000.

3. *Derman. E.* When You Cannot Hedge Continuously, The Corrections of Black-Scholes // RISK, 1999. 12-1 Jan. P. 82–85.

4. *Derman. E.* The Problem of the Volatility Smile Talk at the Euronext Options // Conference. Amsterdam, 2003. May.

5. *Ayache E., Henrotte P., Nassar S., Wang X.*. Can anyone solve the smile problem? // http://www.ito33.com, 2004.